第 46 講　空間ベクトル(3)

【基礎確認事項】

［１］ 共面条件の応用

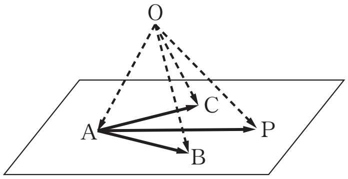
□平面 ABC 上にある点 P については，実数 t，u を用いて

$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}+u\overrightarrow{AC}$　と表せる．

これを変形すると

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+u(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$\overrightarrow{OP}=(1-t-u)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$



ここで，$1-t-u=s$　とおくと，次のことがいえる．

4 点 A，B，C，P が同一平面上にある

$\Longleftrightarrow$　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$，$s+t+u=1$　となる実数 s，t，u が存在

⇒　C&U ①

［２］ 空間における直線のベクトル方程式

□空間における直線のベクトル方程式は，平面におけるものと同様に表せる．以下，s，t を実数とする．

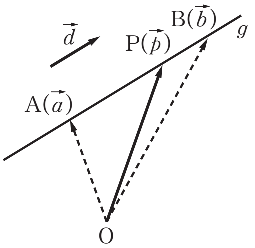
直線のベクトル方程式

点 A$(\vec{a})$ を通り，$\vec{d}$ を方向ベクトルとする直線上の点 P$(\vec{p})$ は

$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$

2 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を通る直線上の点 P$(\vec{p})$ は

$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$　$\Longleftrightarrow$　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$，$s+t=1$



直線の媒介変数表示

A$(x_1,\ y_1,\ z_1)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d}=(l,\ m,\ n)$ である直線 g 上の

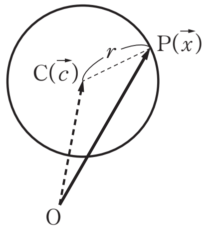
点 P$(x,\ y,\ z)$ は $\begin{cases} x=x_1+lt \\ y=y_1+mt \\ z=z_1+nt \end{cases}$　（t は実数）　と表せる．

⇒　C&U ②

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［3］　球面の方程式

□空間において，定点 C からの距離が一定値 r に等しいような点 P の軌跡を**球面**または**球**という．



点 C($\vec{c}$) を中心とし，半径を r とする球面の方程式は，球面上のどんな点 P($\vec{p}$) に対しても　$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=r$ であることから

$|\vec{p}-\vec{c}|=r$　と表される．

これが球面のベクトル方程式である．

また，C(a，b，c) を中心とする半径 r の球面上に P(x，y，z) をとると，$\mathrm{CP}^2=r^2$ より

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$　と表せる．

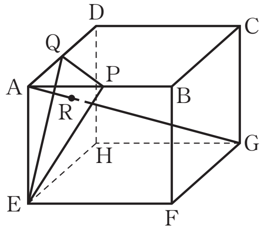
これが球面の方程式である．

⇒　C&U ③

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【CHECK & UP】

1　右図のような直方体 ABCD-EFGH において辺 AB の中点を P，辺 AD を 2：1 に内分する点を Q とし，対角線 AG と平面 EPQ の交点を R とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．



2　2 点 A(1，3，−2)，B(1，−2，0) を通る直線 AB 上の点 P と原点 O について，OB⊥OP となるときの P の座標を求めよ．

3　2 点 A(−1，2，3)，B(3，4，−1) を直径の両端とする球面の方程式を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第46講　空間ベクトル(3)

1　四面体OABCを考え，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする．また，線分OA，OB，OCを $2:1$ に内分する点をそれぞれ A'，B'，C' とし，直線 BC' と直線 $B'C$ との交点をD，3点 A'，B，Cを通る平面と直線ADとの交点をEとする．

(1)　$\overrightarrow{OD}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　原点Oおよび3点A(1，0，0)，B(2，1，0)，C(0，0，2)がある．点Oから3点ABCを通る平面に下ろした垂線の足をHとする．次の問いに答えよ．

(1)　Hの座標を求めよ．

(2)　四面体OABCの体積を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　点 $(1,\ 2,\ 0)$ を通り，$\vec{u}=(1,\ 1,\ -1)$ に平行な直線を l，2点 $(4,\ 2,\ 0)$，$(5,\ 3,\ 0)$ を通る直線を m とする．また，点 $(2,\ 2,\ 1)$ を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の球面をSとする．

(1)　直線 l と yz 平面の交点の座標を求めよ．

(2)　直線 l 上の点Pと直線 m 上の点Qの最短距離を求めよ．

(3)　球面Sの方程式を求めよ．また，球面Sと直線 l が共有点をもつか調べよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第46講　空間ベクトル(3)

原点をOとし，3点A(2, 0, 0)，B(0, 4, 0)，C(0, 0, 3)をとる．原点Oから3点A，B，Cを含む平面に下ろした垂線の足をHとする．このときHの座標は

$\left(\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}, \dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}, \dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ウエ}}}\right)$ であり，$|\overrightarrow{OH}| = \dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 46 講　空間ベクトル(3)

【CHECK & UP】

1 $\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

$\overrightarrow{AR}=k\overrightarrow{AG}=k(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=k\vec{a}+k\vec{b}+k\vec{c}$

$=2k\times\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}\right)+\dfrac{3}{2}k\times\left(\dfrac{2}{3}\vec{b}\right)+k\vec{c}$

$=2k\overrightarrow{AP}+\dfrac{3}{2}k\overrightarrow{AQ}+k\overrightarrow{AE}$

R が平面 PQE 上より　$2k+\dfrac{3}{2}k+k=1$　　$k=\dfrac{2}{9}$

よって　$\overrightarrow{AR}=\boldsymbol{\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{2}{9}\vec{b}+\dfrac{2}{9}\vec{c}}$

「共面条件」の応用．$A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$，$P(\vec{p})$ とし，$\vec{p}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表したとき，その係数の和が 1 になれば，点 P が平面 ABC 上にある．
　よって，ある点を平面上に乗せたいときは，その平面上にある 3 点を終点とする 1 次独立な 3 つのベクトルで表すことが解法の選択肢の 1 つとなる．

2 t を実数とすると

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}=(1,\ 3,\ -2)+t(0,\ -5,\ 2)$

$=(1,\ 3-5t,\ -2+2t)$

と表せる．

OB⊥OP より　$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}=0$

よって　$1\times1-2\times(3-5t)+0\times(-2+2t)=0$　　$10t=5$　　$t=\dfrac{1}{2}$

したがって　$\mathbf{P}\left(\mathbf{1},\ \boldsymbol{\dfrac{1}{2}},\ \mathbf{-1}\right)$

空間ベクトルにおける直線のベクトル方程式の考え方を用いることで，「直線上の点」を媒介変数を用いて「成分表示」で表すこととなる．
　O を始点としたベクトルで表す場合は，それが「直線上の点の座標」となる．

3 中心は線分 AB の中点より，

その座標は　$\left(\dfrac{-1+3}{2},\ \dfrac{2+4}{2},\ \dfrac{3-1}{2}\right)=(1,\ 3,\ 1)$

半径は　$(1,\ 3,\ 1)$ と $(3,\ 4,\ -1)$ の距離で　$\sqrt{4+1+4}=3$

よって求める球面の方程式は　$\boldsymbol{(x-1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9}$

球面または球の方程式は，円の方程式を作るときと同じ感覚で作ることができる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

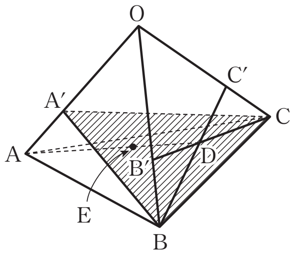
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第46講　空間ベクトル(3)

1　四面体OABCを考え，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする．また，線分OA，OB，OCを2：1に内分する点をそれぞれA′，B′，C′とし，直線BC′と直線B′Cとの交点をD，3点A′，B，Cを通る平面と直線ADとの交点をEとする．

(1)　$\overrightarrow{OD}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．



(1)　DがBC′上の点であることより

$$\overrightarrow{OD}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC'}=(1-t)\vec{b}+\frac{2}{3}t\vec{c}\quad\cdots\cdots①$$

DがB′C上の点であることより

$$\overrightarrow{OD}=(1-s)\overrightarrow{OB'}+s\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}(1-s)\vec{b}+s\vec{c}\quad\cdots\cdots②$$

$\vec{b}$，$\vec{c}$ は1次独立より，①，②から

$$1-t=\frac{2}{3}(1-s),\ \frac{2}{3}t=s\qquad よって\quad s=\frac{2}{5},\ t=\frac{3}{5}$$

よって　$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}}$

(2)　EはAD上の点より

$$\overrightarrow{OE}=(1-u)\overrightarrow{OA}+u\overrightarrow{OD}$$
$$=(1-u)\vec{a}+\frac{2}{5}u\vec{b}+\frac{2}{5}u\vec{c}=\frac{3}{2}(1-u)\overrightarrow{OA'}+\frac{2}{5}u\vec{b}+\frac{2}{5}u\vec{c}$$

Eは平面A′BC上より　$\frac{3}{2}(1-u)+\frac{2}{5}u+\frac{2}{5}u=1$　　$u=\frac{5}{7}$

したがって　$\overrightarrow{OE}=\boldsymbol{\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}+\frac{2}{7}\vec{c}}$

2　原点Oおよび3点A(1，0，0)，B(2，1，0)，C(0，0，2)がある．点Oから3点ABCを通る平面に下ろした垂線の足をHとする．次の問いに答えよ．

(1)　Hの座標を求めよ．

(2)　四面体OABCの体積を求めよ．

(1)　Hは平面ABC上より，実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$
$$=(1,\ 0,\ 0)+s(1,\ 1,\ 0)+t(-1,\ 0,\ 2)$$
$$=(s-t+1,\ s,\ 2t)$$

と表せる．

OH⊥平面ABCより　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$　かつ　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$　より　$1\times(s-t+1)+1\times s+0\times 2t=0$

よって　$2s-t=-1$　……①

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$　より　$-1\times(s-t+1)+s\times0+2\times2t=0$

よって　$-s+5t=1$　……②

①，②より　$s=-\dfrac{4}{9}$，$t=\dfrac{1}{9}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(-\dfrac{4}{9}-\dfrac{1}{9}+1,\ -\dfrac{4}{9},\ \dfrac{2}{9}\right)=\left(\dfrac{4}{9},\ -\dfrac{4}{9},\ \dfrac{2}{9}\right)$　より　$\mathrm{H}\boldsymbol{\left(\dfrac{4}{9},\ -\dfrac{4}{9},\ \dfrac{2}{9}\right)}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{2}{9}(2,\ -2,\ 1)$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\dfrac{2}{9}\sqrt{4+4+1}=\dfrac{2}{3}$

また，$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}^{\,2}\times\sqrt{5}^{\,2}-(-1)^2}=\dfrac{3}{2}$

よって求める体積は　$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

3　点 (1，2，0) を通り，$\vec{u}=(1,\ 1,\ -1)$ に平行な直線を l，2 点 (4，2，0)，(5，3，0) を通る直線を m とする．また，点 (2，2，1) を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の球面を S とする．

(1)　直線 l と yz 平面の交点の座標を求めよ．

(2)　直線 l 上の点 P と直線 m 上の点 Q の最短距離を求めよ．

(3)　球面 S の方程式を求めよ．また，球面 S と直線 l が共有点をもつか調べよ．

(1)　直線 l の方程式は

$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 0)+t(1,\ 1,\ -1)$ より

$x=1+t$，$y=2+t$，$z=-t$　（t は実数）　と表せる．

これと yz 平面　つまり　$x=0$ との交点は　$1+t=0$ より　$t=-1$

よってその座標は　**(0，1，1)**

(2)　直線 m の方程式は，その方向ベクトルが (1，1，0) であることより

$(x,\ y,\ z)=(4,\ 2,\ 0)+s(1,\ 1,\ 0)$

つまり　$x=4+s$，$y=2+s$，$z=0$　（s は実数）　と表せる．

よって　$\mathrm{P}(1+t,\ 2+t,\ -t)$，$\mathrm{Q}(4+s,\ 2+s,\ 0)$ とおくと

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=(s-t+3)^2+(s-t)^2+t^2\\&=2s^2-2(2t-3)s+3t^2-6t+9\\&=2\left(s-t+\frac{3}{2}\right)^2+t^2+\frac{9}{2}\end{aligned}$$

したがって PQ^2 は　$s-t=-\dfrac{3}{2}$ かつ $t=0$　つまり $t=0$，$s=-\dfrac{3}{2}$ のとき　最小値 $\dfrac{9}{2}$ をとる

$\mathrm{PQ}>0$　より　このとき PQ は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{\sqrt{2}}}$ をとる．

(3)　中心 (2，2，1)，半径 $\sqrt{3}$ の球面 S の方程式は

$\boldsymbol{(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3}$

これに $x=1+t$，$y=2+t$，$z=-t$　を代入すると

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$(t-1)^2+t^2+(-t-1)^2=3 \qquad t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって実数 t が存在するので，球面Ｓと直線 l は**共有点をもつ**.

その座標は　$\boldsymbol{\left(1\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 2\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \mp\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}$　**（複号同順）**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第46講　空間ベクトル(3)

原点をOとし，3点A(2，0，0)，B(0，4，0)，C(0，0，3)をとる．原点Oから3点A，B，Cを含む平面に下ろした垂線の足をHとする．このときHの座標は

$\left(\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}},\ \dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{ウエ}},\ \dfrac{\boxed{キク}}{\boxed{ウエ}}\right)$ であり，$|\overrightarrow{OH}|=\dfrac{\boxed{ケコ}}{\sqrt{\boxed{ウエ}}}$ である．

点Hは平面ABC上にあるので，実数s，t，uを用いて

$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$，$s+t+u=1$

と表せる．

$\overrightarrow{OH}=s(2,\ 0,\ 0)+t(0,\ 4,\ 0)+u(0,\ 0,\ 3)=(2s,\ 4t,\ 3u)$

OH⊥平面ABCより　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$　かつ　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}=(-2,\ 4,\ 0)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,\ 0,\ 3)$より

$2s\times(-2)+4t\times4=0$，$2s\times(-2)+3u\times3=0$　これらより　$t=\dfrac{1}{4}s$，$u=\dfrac{4}{9}s$

これと$s+t+u=1$より　$s+\dfrac{1}{4}s+\dfrac{4}{9}s=1$　　よって　$s=\dfrac{36}{61}$

このとき　$t=\dfrac{9}{61}$，$u=\dfrac{16}{61}$

したがって　$\overrightarrow{OH}=\left(\dfrac{72}{61},\ \dfrac{36}{61},\ \dfrac{48}{61}\right)$　より　Hの座標は$\left(\boldsymbol{\dfrac{72}{61}},\ \dfrac{36}{61},\ \dfrac{48}{61}\right)$

また，$\overrightarrow{OH}=\dfrac{12}{61}(6,\ 3,\ 4)$　より　$|\overrightarrow{OH}|=\dfrac{12}{61}\sqrt{36+9+16}=\dfrac{12\sqrt{61}}{61}=\boldsymbol{\dfrac{12}{\sqrt{61}}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。